

Théorème de Bézout - Bézout (XVII^e s.)

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ ($a \neq b$) alors il existe deux coefficients

x et $y \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\text{PGCD}(a, b) = a \cdot x + b \cdot y$$

x et y sont les coefficients de Bézout.

1^{re} conséquence: Si a et b sont premiers entre eux, alors,

l'équation $a \cdot \underline{x} + b \cdot \underline{y} = 1$ a au moins une solution entière!

a et b premiers entre eux: ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1
 $\Rightarrow \text{PGCD}(a, b) = 1$

⚠ **PREMIER $\neq$ PREMIERS ENTRE EUX**

4, 9
└───┘
Pas premiers

Mais $\text{PGCD}(4, 9) = 1$!

7 et 7

$$\text{PGCD}(7, 7) = 7$$

Exemple: Soient $a = 54$ $b = 12$, quels sont les coeff. de

Bézout ?

$$\text{PGCD}(a, b) = 6$$

1) ALGÈBRE:

$$a = 54 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$$

$$b = 12 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3}$$

$$\text{PGCD} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{array}{r} a \quad b \\ 54 \quad 12 \\ -48 \quad 0 \\ \hline 6 \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \quad 6 \quad \text{PGCD} \\ -12 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 6 \end{array}$$

↳ STOP

$$= 54 - 48 = 54 \cdot \underline{1} + 12 \cdot \underline{(-4)} \quad (\text{par l'algorithme de Bézout})$$

$$x=1 \text{ et } y=-9$$

2) Autre manière de calculer:

$$54 \cdot x + 12 \cdot y = 6 \Rightarrow 12y = 6 - 54x$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}x$$

→ c'est une droite!

Si x impair alors $\frac{1}{2} - \frac{9}{2}x$ est un nombre entier

$$x=3 \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{27}{2} = -\frac{26}{2} = -13$$

$$54 \cdot 3 - 12 \cdot 13 = 162 - 162 = 0 //$$

Il y a une infinité de coeff. de Bézout!

Exemple: $\text{PGCD}(27, 3) = 3 \cdot 1 + 27 \cdot 0$

$x=1$ et $y=0$ sont des coeff. de Bézout!

Exercice: Calculer les coeff. de Bézout pour $a=54$ et $b=22$.

$$\begin{array}{l} \text{L1} \\ 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{L1} \\ 2 \cdot 11 \end{array}$$

$$\text{PGCD}(54, 22) = 2 = 54 \cdot x + 22 \cdot y$$

$$22y = 2 - 54x \Rightarrow y = \frac{1}{11} - \frac{27}{11}x$$

On trouve $x=-2$, $y=5$

$$\text{PGCD}(54, 22) = 2 = 54 \cdot (-2) + 22 \cdot 5$$

x	y	
-8	19.7272727	2
-7	17.2727273	2
-6	14.8181818	2
-5	12.3636364	2
-4	9.9090909	2
-3	7.4545455	2
-2	5	2
-1	2.5454545	2
0	0.0909091	2
1	-2.3636364	2
2	-4.8181818	2
3	-7.2727273	2
4	-9.7272727	2
5	-12.1818182	2
6	-14.6363636	2

Algorithme d'Euclide Étendu:

Donné: $a, b \in \mathbb{Z}^*$ ($a \geq b$)

Résultat: PGCD(a, b) et les coeff. de Bézout x et $y \in \mathbb{Z}$
tels que $\text{PGCD}(a, b) = a \cdot \underline{x} + b \cdot \underline{y}$

Algo:

Init: $i=0$; $r_0 = a$ $x_0 = 1$ $y_0 = 0$

$i=1$; $r_1 = b$ $x_1 = 0$ $y_1 = 1$

$$\begin{array}{r|l} r_0 & r_1 \\ r_2 & q_2 \end{array} = \begin{array}{r|l} a & b \\ r_2 & q_2 \end{array}$$

Tant que $r_i \neq 0$ faire
 $i = i+1$

Euclide
Classique

r_i est le reste de la division entière de $r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$ ||
 $x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}$ et $y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}$
end

$$\begin{array}{r|l} r_{i-2} & r_{i-1} \\ r_i & q_i \end{array}$$

Solution: $\text{PGCD}(a, b) = r_{i-1}$, $x = x_{i-1}$, $y = y_{i-1}$

Exemple: $\text{PGCD}(54, 22)$

$$i=0: \quad r_0 = 54 \quad x_0 = \underline{1} \quad y_0 = \underline{0}$$

$$i=1: \quad r_1 = 22 \quad x_1 = \underline{0} \quad y_1 = \underline{1}$$

$$i=2: \quad r_2 = \underline{10} \quad x_2 = \underline{1} - \underline{2} \cdot \underline{0} = \underline{1} \quad y_2 = \underline{0} - \underline{2} \cdot \underline{1} = \underline{-2}$$

$$\begin{array}{r|l} r_0 & r_1 \\ 54 & 22 \\ \underline{10} & \textcircled{2} = q_2 \end{array}$$

$$i=3: \quad r_3 = \underline{2} \quad x_3 = \underline{0} - \underline{2} \cdot \underline{1} = \underline{-2} \quad y_3 = \underline{1} - \underline{2} \cdot (\underline{-2}) = \underline{1+4} = \underline{5}$$

$\text{PGCD}(54, 22)$

$$\begin{array}{r|l} r_1 & r_2 \\ 22 & 10 \\ \underline{2} & \textcircled{2} = q_3 \end{array}$$

$$i = 4: \quad r_4 = \underline{0}$$

STOP

↑
⚠ SIGNES

$$x_4 = 1 - 5 \cdot (-2) = \underline{11} \quad y_4 = -2 - 5 \cdot (5) = \underline{-27}$$

$$\begin{array}{r} 10 \mid 2 \\ 0 \mid \underline{5} \end{array}$$

$$0 = 11 \cdot \underbrace{54}_a - 27 \cdot \underbrace{22}_b$$

Remarque: A l'étape i on a toujours que

$$r_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 PGCD $\Rightarrow$ Coeff. de Bézout.

Aide:

- à chaque étape on x_i et de signe opposé à y_i
- on peut vérifier si les calculs sont juste en vérifiant $r_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i$

Exercice: Calculer PGCD et les coeff. de Bézout de 336 et 68.

$$i = 0:$$

$$r_0 = 336 \quad x_0 = 1 \quad y_0 = 0$$

$$i = 1:$$

$$r_1 = 68 \quad x_1 = \underline{0} \quad y_1 = 1$$

$$i = 2:$$

$$\begin{array}{r} 336 \mid 68 \\ 64 \mid \underline{4} \end{array}$$

$$r_2 = 64 \quad x_2 = 1 - \underline{4} \cdot 0 = \underline{1} \quad y_2 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$$

$$i = 3:$$

$$\begin{array}{r} 68 \mid 64 \\ 4 \mid \underline{1} \end{array}$$

$$r_3 = 4 \quad x_3 = \underline{0} - \underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{-1} \quad y_3 = 1 - 1 \cdot (-4) = \underline{5}$$

$$\text{PGCD}(336, 68) = 4 = 336 \cdot \underline{-1} + 68 \cdot \underline{5}$$

$$\underline{i = 4:}$$

$$\begin{array}{r|l} 64 & 4 \\ 0 & 16 \end{array}$$

$$r_4 = 0 \quad \text{STOP}$$

$$\text{PGCD}(336, 68) = 4 = 336(-1) + 68 \cdot 5$$